Leçon 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Développements :

Points extrémaux de la boule unité, Suite de polygones.

Bibliographie :

Mercier, Combes, Nourdin, Ruaud Warusfel algèbre 3 ; Truffaut, Eiden, Tauvel

Rapport du jury :

Dans cette leçon, la notion de coordonnées barycentriques est incontournable ; des illustrations dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables) sont envisageables. Il est important de parler d'enveloppe convexe, de points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent. S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en présentant le lemme de Farkas, le théorème de séparation de Hahn-Banach, ou les théorèmes de Helly et de Caratheodory.

Remarque 1. *On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension finie n et on note E l'espace vectoriel associé.*

1 Notion de barycentre

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2 (Mercier p34)**.** *Système de points pondérés.*

Définition 3 (Mercier p34)**.** *Fonction vectorielle de Leibniz.*

Proposition 4 (Mercier p35)**.** *La fonction de Leibniz est constante ou bijective*

Définition 5 (Mercier p35)**.** *Le barycentre d'un système de points pondérés est un point G tel que $\sum_i \alpha_i GA_i = 0$.*

Définition 6 (Mercier p35)**.** *L'isobarycentre de points $A_1, .., A_d$ est le barycentre du système de points pondérés $(A_i, 1/d)$.*

Exemple 7 (Combes p148)**.** *Isobarycentre des racines primitives 15-ième de l'unité.*

Remarque 8. *Regarder Combes algèbre et géométrie pour présentation similaire.*

Proposition 9 (Mercier p35)**.** *Le barycentre est commutatif, homogène.*

Remarque 10 (Combes p133)**.** *Pour définir le barycentre d'une famille de points, on peut supposer que $\sum \lambda_i = 1$.*

Proposition 11 (Mercier p35)**.** *[Combes p134 (mieux expliqué)] Le barycentre est associatif.*

Application 12 (Combes p134)**.** *[Nourdin p154] Dans un plan affine euclidien, les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point G, l'isobarycentre situé au tiers de la base de chacune d'elles.*

Application 13 (Mercier p35)**.** *[Combes p134] Isobarycentres du triangle (centre de gravité), du tétraèdre (aux $3/4$ de chaque segment reliant sommet et centre de gravité de la face opposée), et du parallélogramme. (A mettre ?)*

L'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme est le milieu des diagonales et appartient aux droites passant par les milieux des deux côtés opposés.

L'isobarycentre des sommets d'un tétraèdre est situé au $1/4$ de la base de chacun des segments d'extrémité un sommet et le centre de gravité de la base opposée et coïncide avec le milieu des segments d'extrémités les milieux des deux arêtes opposées.

1.2 Liens avec la structure affine

Proposition 14 (Mercier p37)**.** *[Combes p136] Si A est non-vide, le sous-espace affine engendré par A est l'ensemble des barycentres des points de A.*

Application 15 (Mercier p37)**.** *Si A est la réunion de deux points, $Aff(A)$ est une droite affine.*

Si A est la réunion de trois points non alignés, $Aff(A)$ est un plan affine.

Proposition 16 (Mercier p38)**.** *[Combes p136] Une partie non vide $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine si et seulement si elle est stable par barycentration.*

Proposition 17 (Mercier p47)**.** *[Combes p135] Une application est affine si et seulement si elle conserve le barycentre.*

Soient $(\mathcal{F}, F)$ un autre espace affine, $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$. f affine si et seulement si , pour tous $\lambda_1, .., \lambda_r$ tels que $\sum \lambda_i \neq 0$, pour tout $A_1, .., A_r \in \mathcal{E}$, $f(\sum \lambda_i A_i) = \sum \lambda_i f(A_i)$.

Application 18 (Mercier p48)**.** *Si f est une application affine, $f(Aff(A)) = Aff(f(A))$.*

Application 19 (Nourdin p155)**.** *Une application affine conserve l'alignement.*

Remarque 20 (Combes p136)**.** *Si $f \in Aut(\mathcal{E})$ permute les points $A_1, .., A_k$ de $\mathcal{E}$ alors f laisse fixe l'isobarycentre de ces points.*

1.3 Coordonnées barycentriques

Remarque 21. *Faut-il redéfinir ce qu'est un repère affine ?*

Définition 22 (Mercier p38)**.** *[Combes p137] Système affinement libre.*

Une famille de points $(A_i)_i$ est affinement libre si pour tout i, A_i n'est pas dans l'espace affine engendré par les A_j , $j \neq i$ si et seulement si pour tout i, A_i n'est pas un barycentre des A_j , $j \neq i$ si et seulement si pour un i, la famille des $(\overline{A_iA_j})_{j\neq i}$ est libre si et seulement si pour tout i, la famille des $(\overline{A_iA_j})_{j\neq i}$ est libre.

Définition 23 (Mercier p40)**.** *Repère affine.*

Remarque 24 (Mercier p40)**.** *$(A_0, .., A_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si $(\overline{A_0A_1}, .., \overline{A_0A_n})$ est une base de E.. On a alors $E = A_0 + vect(\overline{A_0A_i}, i \in \mathbb{N})$.*

Application 25 (FGN p313)**.** *Isométrie du simplexe régulier.*

Définition 26 (Mercier p41)**.** *[Combes p137] Système de coordonnées barycentriques. Système normalisé.*

Proposition 27 (Mercier p41)**.** *Tout point M admet un unique système de coordonnées barycentriques normalisées.*

Contre exemple 28 (Mercier p41)**.** *Regarder la remarque .*

Exemple 29 (Ruaud Warusfel algèbre 3 p153)**.** *[Boyer p224] Le centre de gravité d'un triangle d'un plan affine euclidien a pour coordonnées barycentriques* $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Coordonnées barycentriques du centre de gravité.
Coordonnées barycentriques du centre du cercle circonscrit.
Coordonnées barycentriques de l'orthocentre.
Coordonnées barycentriques du cercle inscrit.
Centre de gravité/intersection des médianes : $(1, 1, 1)$
Centre du cercle inscrit/intersection des bissectrices : (a, b, c)
Centre du cercle circonscrit/intersection des médiatrices : $(sin(2\alpha), sin(2\beta), sin(2\gamma))$
Orthocentre/intersection des hauteurs : $(tan(\alpha), tan(\beta), tan(\gamma))$

Définition 30 (Truffaut p48)**.** *Aire algébrique. (En parler ?)*

Proposition 31 (Truffaut p48)**.** *Les aires algébriques forment un système de coordonnées barycentriques de M.*

Exemple 32 (Truffaut p49)**.** *Coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit, circonscrit. (Ici ?)*

Proposition 33 (Eiden)**.** *Soit P un plan affine euclidien orienté, soit ABC triangle non plat. Si $M \in P$, ses coordonnées barycentriques sont proportionnelles aux aires algébriques $(A(BCM), A(CAM), A(ABM))$. De plus, si toutes les coordonnées sont de même signe, M est dans l'intérieur (géométrique) du triangle ABC.*

Application 34 (Eiden)**.** *Lemoine. Il existe un unique point dans l'intérieur géométrique du triangle ABC minimisant la somme des carrés de ses distances aux sommets A, B, C. Ses coordonnées barycentriques sont* (BC^2, AC^2, AB^2).

Remarque 35. *Parler de*
Coordonnées barycentriques dans un repère affine [Boy15] p.22.
Coordonnées barycentriques et coordonnées dans un repère affine p24 ?

1.4 Equations barycentriques de droites

Proposition 36 (Eiden ?)**.** *[Combes p141] Soit P plan affine, soit ABC triangle de référence. Les 3 points de coordonnées barycentriques (x_i, y_i, z_i), $1 \leq i \leq 3$ sont alignés si et seulement si le déterminant est nul.*

Proposition 37 (Eiden ?)**.** *Considérons trois droites affines $d_i, 1 \leq i \leq 3$, dont les équations barycentriques sont $a_ix + b_iy + c_iz = 0$. Ces trois droites sont parallèles ou concourantes, si et seulement si le déterminant des a, b, c est nul.*

Définition 38. *Pour P, Q, R trois points alignés, avec R, Q distincts de P, on peut définir le rapport de mesures algébrique PR/PQ comme le seul scalaire vérifiant $\overline{PR} = (PR/PQ)\overline{PQ}$.*

Théoreme 39 (Truffaut p51)**.** *Théorème de Ceva.*

Soient A, B, C non-alignés et D, E, F distincts de A, B, C et respectivement sur $[BC], [CA], [AB]$. Alors les droites $(AD), (BE), (CF)$ sont concourantes si et seulement si $DB/DC.EC/EA.FA/FB = -1$.

Théoreme 40 (Truffaut p52)**.** *Théorème de Ménélaus.*

Soient A, B, C non-alignés et D, E, F distincts de A, B, C et respectivement sur $(BC), (CA), (AB)$. Alors les points D, E, F sont contenus dans une droite affine si et seulement si $DB/DC.EC/EA.FA/FB = 1$.

Théoreme 41. *Théorème de Pascal.*

Proposition 42. *Ellipse de Steiner.*

2 Convexité

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 43 (Tauvel p69)**.** *Combinaison convexe.*

Exemple 44. *$[A, B]$ est l'ensemble des combinaisons convexes de A et B.*

Définition 45 (Combes p141)**.** *[Tauvel p70] Une partie A est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in A$, toute combinaison convexe de x et de y est dans A, ce qui est équivalent à dire que toute combinaison convexe d'éléments de A est dans A.*

Remarque 46. *Une partie convexe est étoilée.*

Exemple 47 (Combes p142)**.** *Pour $||.||$ une norme sur E, la boule unité de E pour $||.||$ est convexe.*

Exemple 48. $\{(x, y) \in R^2, y \geq exp(x)\}$ *est convexe.*

Exemple 49. *Les sous-espaces affines sont convexes.*

Application 50. *Ellipsoïde de John Loewner. (A mettre ?)*

Proposition 51 (Combes p142)**.** *[Tauvel p70][Nourdin p156] L'adhérence d'un convexe est convexe.*

Proposition 52 (Combes p142)**.** *[Mercier] Si f est une application affine, les images directe et réciproque d'une partie convexe est convexe.*

Remarque 53. *Parler du théorème de projection sur un convexe fermé ?*

2.2 Enveloppe convexe

Remarque 54. *Faire une petite partie sur les propriétés topologiques ?*

Proposition 55 (Combes p142)**.** *[Tauvel p70][Nourdin p156] L'intersection de convexes est convexe.*

Définition 56 (Combes p143)**.** *[Tauvel p71] Enveloppe convexe.*

Proposition 57 (Nourdin p156)**.** *L'enveloppe convexe de A est l'ensemble des barycentres des points de A affectés de coefficients positifs.*

Proposition 58 (Tauvel p71)**.** *Théorème de Lucas.*

(Lorsque P est dans R[X] et scindé, le théorème de Rolle nous donne ce résultat).

Proposition 59 (Combes p143)**.** *Si f est une application affine, $f(co(A)) = co(f(A))$.*

Théoreme 60 (Tauvel p71)**.** *Théorème de Carathéodory : En dimension n, l'enveloppe convexe de A est l'ensemble des combinaisons convexes d'au plus $n + 1$ points de A.*

Corollaire 61 (Tauvel p72)**.** *L'enveloppe convexe d'un ensemble borné est bornée.*

L'enveloppe convexe d'un ensemble compact est compacte.

Application 62. *Si G est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, il existe $q \in Q^{++}(\mathbb{R})$, $G \subset O(q)$. (?)*

Remarque 63 (Tauvel p71)**.** *L'enveloppe convexe d'un ouvert et ouverte. Mais ne marche pas avec les fermés.*

Contre-ex : L'enveloppe convexe du fermé $\{(0, 0\} \cup \{(x, y), x > 0, y > 0 et y \geq 1/x\}$ est $\{(0, 0\} \cup \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ qui n'est pas un fermé.

Proposition 64. *Tout convexe compact est l'enveloppe convexe de sa frontière.*

Proposition 65. *L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme $||.||_2$. (Ici ?)*

Définition 66. *On appelle simplexe de E l'enveloppe convexe de $n+1$ points affinement indépendants de $\mathcal{E}$.*

2.3 Points extrémaux

Définition 67 (Tauvel p82)**.** *[Combes p143] Point extrémal.*

Proposition 68 (Tauvel p82)**.** *Conditions équivalentes d'extrémalité.*

Exemple 69. *Le cercle est l'ensemble des points extémaux du disque fermé. Les points extrémaux d'un triangle sont ses trois sommets.*

Proposition 70 (Combes p144)**.** *Soit C une partie convexe de $\mathcal{E}$. Toute application affine de $\mathcal{E}$ dans lui-même telle que $f(C) = C$ permute les points extrémaux de C.*

Proposition 71 (FGN)**.** *Points extrémaux de la boule unité.*

Application 72. *Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.*

Théoreme 73 (Tauvel p83)**.** *Théorème de Krein Milman.*

Tout convexe compact de $\mathcal{E}$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.